ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine,

onda je $2x$ broj tulipana, a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Za zaradu od prodanog cvijeća redom vrijedi

$x \cdot 9 + 2x \cdot 8 + 3x \cdot 10 = 275\,000$ 1 BOD

$9x + 16x + 30x = 275\,000$ 1 BOD

$55x = 275\,000$ 1 BOD

$x = 275\,000 : 55 = 5000$ 1 BOD

Prošle je godine prodano 5 000 krizantema, 10 000 tulipana i 15 000 ruža. 3 BODA

Dakle, ukupno je prodano 30 000 cvjetova. 1 BOD

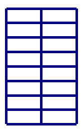
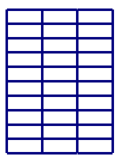
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine, tada je $2x$ broj tulipana,

a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Neka je zarada od krizantema označena sa  , od tulipana  , a od ruža  .

x $2x$ $3x$

Ukupna zarada od svega cvijeća (u iznosu od 275 000 kn) sastoji se od

9 + 16 + 30 = 55 jednakih dijelova.

Vrijednost svakoga od tih dijelova je 275 000 : 55 = 5000 kn. 2 BODA

Od krizantema je zarađeno 5000 · 9 = 45 000 kn, a budući da je cijena jedne krizanteme bila 9 kn, prodano je ukupno 45 000 : 9 = 5 000 krizantema. 1 BOD

Od tulipana je zarađeno 5000 · 16 = 80 000 kn, a budući da je cijena jednog tulipana bila 8 kn,

prodano je ukupno 80 000 : 8 = 10 000 tulipana. 2 BODA

Od ruža je zarađeno 5000 · 30 = 150 000 kn, a budući da je cijena jedne ruže bila 10 kn,

prodano je ukupno 150 000 : 10 = 15 000 ruža. 2 BODA

Ukupno je prodano 5 000 + 10 000 + 15 000 = 30 000 cvjetova. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Rastavom broja 3915 na proste faktore dobiva se:

3915 = 3 · 3 · 3 · 5 · 29. 2 BODA

Kako se pomoću faktora rastava ne može dobiti niti 30, niti 31, posljednji dan u mjesecu bio je 29.,

1 BOD

a jedino prijestupna veljača ima 29 dana pa je povratak u 3. mjesecu. 1 BOD

Preostali brojevi iz rastava (3, 3 i 5) daju 3 rješenja:

1.) 9 dana zimovanja i petoro djece
Povratak je 8. 3. 2 BODA

2.) 5 dana zimovanja i devetoro djece
Povratak je 4. 3. 2 BODA

3.) 15 dana zimovanja i troje djece
Povratak je 14. 3. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Umnožak brojeva $\overline{61x}$ i $\overline{37y1}$ djeljiv je brojem 15 ako vrijedi jedna od mogućnosti:

a) barem jedan broj je djeljiv i brojem 3 i brojem 5 ili

b) jedan broj je djeljiv brojem 3, a drugi brojem 5. 2 BODA

Budući da broj $\overline{37y1}$ ima zadnju znamenku 1 (znamenku jedinice), taj broj ne može biti djeljiv

brojem 5 (znamenka jedinica mora biti 0 ili 5).

To ima za posljedicu da broj $\overline{61x}$ mora biti djeljiv brojem 5, tj. mora biti ili $x = 0$ ili $x = 5$.

2 BODA

Ako je $x = 5$, onda je prvi broj jednak 615, a on je djeljiv i brojem 5 i brojem 3 (zbroj znamenaka je 12). Dakle, djeljiv je brojem 15 pa će i umnožak broja 615 s bilo kojim brojem biti djeljiv s 15.

Zato znamenka y u broju $\overline{37y1}$ može biti bilo koja od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9.

3 BODA

Drugi broj može biti: 3701, 3711, 3721, 3731, 3741, 3751, 3761, 3771, 3781, 3791. 1 BOD

Ako je $x = 0$, onda je prvi broj jednak 610, a on nije djeljiv brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka 7. Zato broj $\overline{37y1}$ mora biti djeljiv brojem 3, tj. y može biti 1, 4 ili 7, odnosno drugi broj je u tom slučaju 3711, 3741 ili 3771. 2 BODA

…………………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Povežemo li svaku razinu s brojem malih trokutića na njoj, uočavamo da vrijedi:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića
3. razina – 5 trokutića
4. razina – 7 trokutića … 1 BOD

Zaključujemo da će na 5. razini biti 9, na 6. razini 11 trokutića, itd… 1 BOD

tj. da će na n-toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 1 BOD

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će 2 · 100 – 1 = 199 trokutića. 2 BODA

Ukupan broj trokutića dobije se zbrajanjem 1 + 3 + 5 + 7 + … + 199. 1 BOD

Primjenjujući Gaussovu dosjetku dobijemo

$$1+3+5+...+197+199=(1+199)\cdot(100:2)=200\cdot 50=10000.$$ 3 BODA

Trokut sastavljen od 100 razina sadrži 10 000 trokutića. 1 BOD

…………………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Računanje zbroja 1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 moguće je na više načina.

Taj zbroj se može izračunati i ovako

1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 =
= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) + … + (99 + 101) = 1 BOD
= 200 + 200 + 200 + … + 200 = (ima 50 pribrojnika) 1 BOD
= 50 · 200 = 10 000 1 BOD

ili ovako

1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 =
= (1 + 2 + 3 + … + 199 + 200) – (2 + 4 + 6 + … + 198 + 200) = 1 BOD
= (200 · 201) : 2 – 2 · (1 + 2 + 3 + … + 99 + 100) =
= 100 · 201 – 2 · (100 · 101 : 2) = 1 BOD
= 20 100 – 10 100 = 10 000 1 BOD

i na druge načine.

Točno određivanje tog zbroja boduje se s 3 boda.

Drugi način:

U 1. razini je 1 trokutić.

U 1. i 2. razini je ukupno $1 + 3 = 4$ trokutića, pri čemu je $4 = 2 \cdot 2$. 1 BOD

U 1., 2. i 3. razini ukupno je $1 + 3 + 5 = 9$ trokutića, pri čemu je $9 = 3 \cdot 3$. 1 BOD

U 1., 2., 3. i 4. razini je ukupno $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ trokutića, pri čemu je $16 = 4 \cdot 4$. 1 BOD

U prvih pet razina nalazi se ukupno $5 \cdot 5 = 25$ trokutića,

u prvih šest razina broj trokutića je $6 \cdot 6 = 36$, 1 BOD

a to znači da trokut sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\,000$ trokutića. 1 BOD

Broj trokutića na pojedinoj razini nalazimo promatranjem početne situacije:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića, $3 = 2 \cdot 2 - 1$
3. razina – 5 trokutića, $5 = 2 \cdot 3 - 1$
4. razina – 7 trokutića, $7 = 2 \cdot 4 - 1$ … 1 BOD

Na 5. razini bit će 9 ($9 = 2 \cdot 5 - 1$) , na 6. razini 11 ($11 = 2 \cdot 6 - 1$) trokutića, itd.…
tj. da će na n-toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 2 BODA

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će $2 \cdot 100 - 1 = 199$ trokutića. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Zaključak da je ukupan broj trokutića u n razina jednak $n \cdot n$, odnosno da trokut sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\,000$ trokutića, boduje se s 5 bodova, neovisno o tome razmatraju li se trokutići sadržani u pet i šest razina ili samo za (nacrtane) četiri razine.

5. Zbroj znamenaka svih jednoznamenkastih brojeva jednak je 45. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih dvoznamenkastih brojeva dobit ćemo tako da zbrojimo sve znamenke na mjestu desetica ($10 \cdot 45$) i sve znamenke na mjestu jedinica ($9 \cdot 45$):

$10 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 19 \cdot 45 = 855$. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1 do 99 (manjih od 100) jednak je $45 + 855 = 900$. 1 BOD

Zbroj znamenaka brojeva od 100 do 999 (svih troznamenkastih brojeva) jednak je zbroju svih znamenaka na mjestu stotica ($100 \cdot 45$) uvećanom za zbroj svih znamenaka u svim dvoznamenkastim „završetcima“ ($9 \cdot 900$):

$100 \cdot 45 + 9 \cdot 900 = 4500 + 8100 = 12\,600$. 2 BODA

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1000 do 1999 jednak je

$1000 \cdot 1 + 900 + 12\,600 = 14\,500$**.** 2 BODA

Zbroj znamenaka brojeva od 2000 do 2016 jednak je $17 \cdot 2 + 45 + 7 + 21 = 107$. 2 BODA

Ukupan zbroj svih znamenaka je 900 + 12 600 + 14 500 + 107 = 28 107. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Bez obzira na način rješavanja, koraci u rješavanju moraju biti valjano argumentirani. Ukoliko učenik točno postavi zadatak, a pogriješi samo pri računanju u nekom od dijelova zadatka, za svaku takvu pogrešku oduzeti samo bodove koje donosi taj dio zadatka, ali ne i bod za konačno rješenje.