ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

6. razred-rješenja

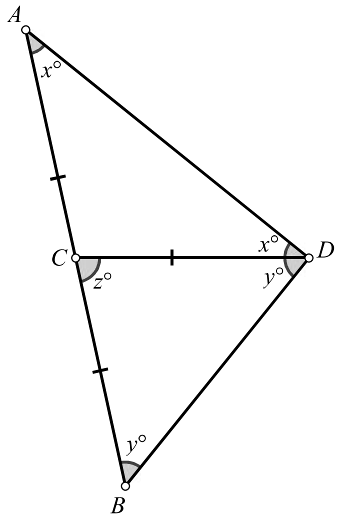
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

Posuda A	Posuda B	
U jednoj litri smjese $\frac{8}{15} l\ crvene$, $\frac{7}{15} l\ bijele$	U jednoj litri smjese $\frac{11}{20} l\ crvene$, $\frac{9}{20} l\ bijele$	2 boda
Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15} l\ bijele$	Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20} l\ bijele$	3 boda
U ostatku, tj. u 8 litara smjese ostalo $8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15} l\ bijele$	U ostatku, tj. u 13 litara smjese ostalo $13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20} l\ bijele$	3 boda
U posudi A bit će: $\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60} = 6\frac{53}{60} l$ bijele boje.	U posudi B bit će: $\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60} = 9\frac{7}{60} l$ bijele boje	2 boda

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Kut $\measuredangle BCD$ je vanjski kut trokuta ACD koji je nasuprot unutarnjih kutova $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle ADC$ pa vrijedi $z° = x° + x° = 2x°$. 2 BODA

Trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle DBC| = |\measuredangle CDB| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut BCD vrijedi

$|\measuredangle DBC| + |\measuredangle CDB| + |\measuredangle BCD| = 180°$. 2 BODA

$y° + y° + z° = 180°$

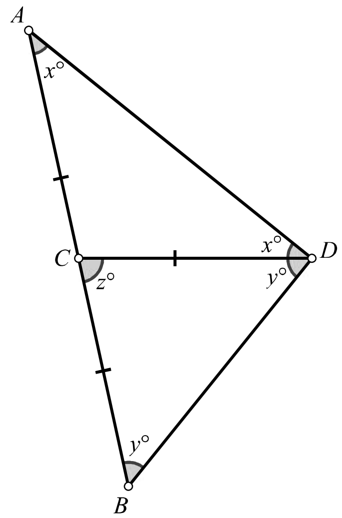
$2x° + 2y° = 180°$

$x° + y° = 90°$ 2 BODA

Dakle, $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle ADC| + |\measuredangle CDB| = x° + y° = 90°$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Kut $\measuredangle BCA$ je ispruženi kut pa iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|\measuredangle DCA| = 180° - z°$.

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut ACD vrijedi

$|\measuredangle DCA| + |\measuredangle ADC| + |\measuredangle CAD| = 180°$. 1 BOD

$180° - z° + x° + x° = 180°$

$2x° = z°$

$x° = \frac{z°}{2}$. 2 BODA

Analogno, trokut *BCD* je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle CDB| = |\measuredangle DBC| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut *BCD* vrijedi

$|\measuredangle BCD| + |\measuredangle CDB| + |\measuredangle DBC| = 180°$. 1 BOD

$z° + y° + y° = 180°$

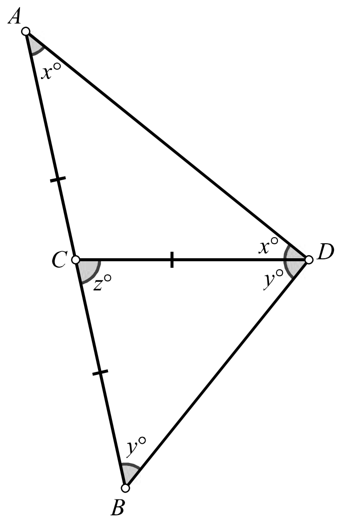
$2y° = 180° - z°$

$y° = \frac{180° - z°}{2}$. 2 BODA

Na kraju, $|\measuredangle ADB| = x° + y° = \frac{z°}{2} + \frac{180° - z°}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$. 1 BOD

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



1 BOD

Trokut *ACD* je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Trokut *BCD* je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle DBC| = |\measuredangle CDB| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut *ABD* vrijedi

$|\measuredangle BAD| + |\measuredangle DBA| + |\measuredangle ADB| = x° + y° + (x° + y°) = 2x° + 2y° = 180°$ 4 BODA

odnosno $x° + y° = \frac{180°}{2} = 90°$. 2 BODA

Dakle, $|\measuredangle ADB| = x° + y° = 90°$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

S obzirom da zbroj tisuću najmanjih uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva iznosi

$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 = \dfrac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$, 2 BODA

a naših traženih je 31500, najmanji traženi broj je negativan, a najveći pozitivan. 1 BOD

Zbroj $0 + 1 + 2 + \ldots + 999$ se razlikuje od zbroja $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ jer nema pribrojnik 1000, a ima pribrojnik 0. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Zbroj $-1 + 0 + 1 + \ldots + 998$ se razlikuje od zbroja $0 + 1 + 2 + \ldots + 999$ jer nema pribrojnik 999, a ima pribrojnik -1. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Analogno, svaki sljedeći manji je za 1000. 1 BOD

Kako je $500\,500 - 31\,500 = 469\,000$ i $469\,000 : 1000 = 469$, 2 BODA

najveći od traženih brojeva je $1000 - 469 = 531$, 1 BOD

a najmanji je $1 - 469 = -468$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Razmatranje zbrojeva te zaključivanje o smanjivanju za 1000 boduje se s ukupno 3 boda.

Drugi način:

Prvi broj označimo s x. Slijede ga $x + 1, x + 2, \ldots, x + 999$. 1 BOD

Vrijedi $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 999) = 31\,500$ 1 BOD

odnosno $1000x + (1 + 2 + \ldots + 999) = 31\,500$. 2 BODA

Gaussovom dosjetkom izračunamo da je $1 + 2 + \ldots + 999 = 499\,500$. 2 BODA

Vrijedi $1000x + 499\,500 = 31\,500$

$1000x = -468\,000$

$x = -468$. 2 BODA

Tada je $x + 999 = 531$. 1 BOD

Najmanji od traženih brojeva je broj -468, a najveći je 531. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1000} = 31500$. 1 BOD

Prema Gaussovoj dosjetki je

$a_1 + a_{1000} = a_1 + a_1 + 999 = 2a_1 + 999$

$a_2 + a_{999} = a_1 + 1 + a_1 + 998 = 2a_1 + 999$

$a_3 + a_{998} = a_1 + 2 + a_1 + 997 = 2a_1 + 999$

…

$a_{500} + a_{501} = a_1 + 499 + a_1 + 500 = 2a_1 + 999$ 3 BODA

Zbrojivši sve ove jednakosti dobivamo

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1000} = 500 \cdot (2a_1 + 999)$. 1 BOD

Zato je $500 \cdot (2a_1 + 999) = 31500 \quad / : 500$

$2a_1 + 999 = 63$

$2a_1 = 63 - 999 = -936 \quad / : 2$

$a_1 = -468$ 4 BODA

Slijedi $a_{1000} = -468 + 999 = 531$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi 360° : 12 = 30°. 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min = $\frac{2}{3}$ h pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Dakle, u 3 sata i 40 minuta mala kazaljka otklonila se 3 · 30° + 20° = 110° od položaja 12 sati.

1 BOD

U jednome satu se velika kazaljka pomakne za puni krug odnosno 360°. 1 BOD

Dakle, u 3 sata i 40 minuta velika se kazaljka pomakla $240°$ od položaja 12 sati. 2 BODA

Manji kut između kazaljki iznosi $240° - 110° = 130°$. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360° : 12 = 30°$. 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min = $\frac{2}{3}$ h pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 3 i 8 na satu je $5 \cdot 30° = 150°$. 3 BODA

Veličina kuta između kazaljki iznosi $150° - 20° = 130°$. 3 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za 40 minuta velika se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{40}{60} \cdot 360° = 240°$. 2 BODA

Za 3 sata mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{3}{12} \cdot 360° = 90°$. 2 BODA

Za 40 minuta mala se kazaljka od 3 sata pomakne za $\frac{40}{12 \cdot 60} \cdot 360° = 20°$. 3 BODA

Dakle, za 3 sata i 40 minuta mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $90° + 20° = 110°$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki analognog sata u 3 sata i 40 minuta iznosi $240° – 110° = 130°$. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360° : 12 = 30°$. 2 BODA

U 3 sata i 40 minuta velika kazaljka je na broju 8.

Veličina kuta između brojeva 8 i 12 na analognom satu je $4 \cdot 30° = 120°$. 1 BOD

40 minuta je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ sata. 1 BOD

Mala kazaljka za 1 sat prijeđe 30°, a za 40 minuta prijeđe $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 12 i 3 na analognom satu je $3 \cdot 30° = 90°$. 1 BOD

U 3 sata i 40 minuta mala kazaljka je od broja 12 udaljena za $90° + 20° = 110°$. 1 BOD

Veći kut između kazaljki je $120° + 110° = 230°$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki je $360° - 230° = 130°$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Neka su $x_1, x_2, ..., x_{11}$ traženi prirodni brojevi i D($x_1, x_2, ..., x_{11}$) njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika $x_1, x_2, ..., x_{11}$ djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$), onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$). 2 BODA

S obzirom da je $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, 1 BOD

onda je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ najmanji mogući umnožak faktora veći od 11. 3 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je $2016 : 12 = 168$. 3 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka su $x_1, x_2, ..., x_{11}$ traženi prirodni brojevi i D($x_1, x_2, ..., x_{11}$) njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika $x_1, x_2, ..., x_{11}$ djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$), onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$). 2 BODA

Djelitelji broja 2016 su 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12,… 2 BODA

a najmanji među njima koji je veći od 11 je broj 12. 2 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je $2016 : 12 = 168$. 3 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA