

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Treba izračunati koliko je % poskupjela cijena materijala za izgradnju druge polovine zgrade sa 60 % udjela materijala uz poskupljenje 15%.

$$15\% \cdot 60\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{1000} = 4,5\% \quad 4 \text{ BODA}$$

Na sličan izračunavamo koliko je posto poskupjela cijena rada izgradnje druge polovine zgrade sa 40% udjela uz poskupljenje 8 %.

$$8\% \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{1000} = 1,6\% \quad 4 \text{ BODA}$$

$$4,5\% + 1,6\% = 6,1\% \quad 1 \text{ BOD}$$

Izgradnja stambene zgrade poskupjela je u odnosu na početnu cijenu za 6.1%. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 15 %, trošak će biti $1.15 \cdot 0.3 = 0.345 = 34,5\%$ što je povećanje troškova za 4.5 %.

4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje.

Nakon povećanja od 8 %, trošak će biti $1.08 \cdot 0.2 = 0.216 = 21,6\%$ što je povećanje troškova za 1.6 %.

4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je $4,5\% + 1,6\% = 6,1\%$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Povećanjem cijene troškova materijala za 15 %, trošak će se povećati za

$0.15 \cdot 0.3 = 0.045 = 4.5\%$. 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od $40\% = 20\%$ ukupnog troška izgradnje.

Povećanjem cijene rada za 8% , trošak će se povećati za $0.08 \cdot 0.2 = 0.016 = 1.6\%$. 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je $4.5\% + 1.6\% = 6.1\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Petorke znamenaka koje zadovoljavaju uvjet da je zbroj znamenaka traženih peteroznamenkastih

brojeva 42 su: $\{9, 9, 9, 9, 6\}$, $\{9, 9, 9, 8, 7\}$ i $\{9, 9, 8, 8, 8\}$. 3 BODA

Koristeći znamenke prve petorke moguće je odrediti 5 brojeva, ali 69 999 ne zadovoljava uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 996, 99 969, 99 699, 96 999 2 BODA

Koristeći znamenke druge petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) = 20$ brojeva, ali 87 999, 79 998, 79 989, 79 899, 78 999 ne zadovoljavaju uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 987, 99 978, 99 897, 99 879, 99 798, 99 789, 98 997, 98 979, 98 799, 97 998, 97 989, 97 899, 89 997, 89 979, 89 799. 2 BODA

Koristeći znamenke treće petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) : 2 = 10$ brojeva i svi zadovoljavaju uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 888, 98 988, 98 898, 98 889, 89 988, 89 898, 89 889, 88 998, 88 989, 88 899. 2 BODA

Traženih brojeva ima ukupno $4 + 15 + 10 = 29$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Navedeni svi peteroznamenkasti brojevi, koji su rješenje zadatka, i odgovor bez obrazloženja boduju se s 10 bodova. Za rješenja koja su ponovljena ili pogrešna oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka dva ponovljena / pogrešna rješenja oduzima po 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

Kako je $2415 : 3 = 805$, Ante će dobiti $2 \cdot 805 = 1610$ kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Budući da je $2415 : 5 = 483$, Ante dobiva $2 \cdot 483 = 966$ kn, a Branko $3 \cdot 483 = 1449$ kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

Drugi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

U tom slučaju Ante će dobiti $2k$ kn, a Branko k kn, pri čemu je k racionalan broj.

Vrijedi da je $2k + k = 2415$, $3k = 2415$, $k = 805$.

Ante će dobiti $2 \cdot 805 = 1610$ kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Tada će Ante dobiti $2l$ kn, a Branko $3l$ kn, pri čemu je l racionalan broj.

Budući da je $2l + 3l = 2415$, $5l = 2415$, $l = 483$.

Ante dobiva $2 \cdot 483 = 966$ kn, a Branko $3 \cdot 483 = 1449$ kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$.

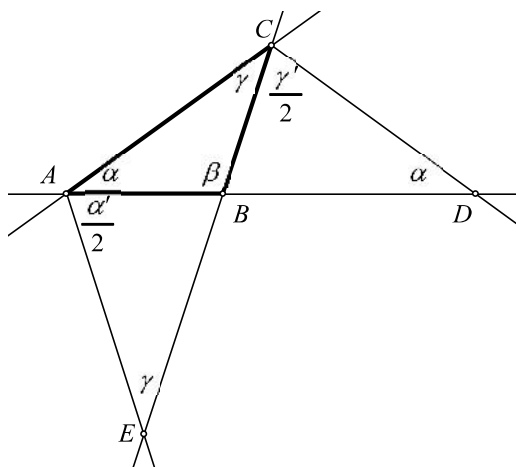
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

4. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ i $|\angle ACB| = \gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ' .

$$\alpha + 180 - \alpha'$$

$$\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma + 180 - \gamma'$$

$$\frac{\gamma'}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

1 BOD

Trokut CAE je jednakokrakan s osnovicom \overline{CE} pa vrijedi da je $|\angle CEA| = |\angle ACE| = \gamma$.

Budući da je $|\angle EAB| = \frac{\alpha'}{2}$ i $|\angle ACE| + |\angle EAC| + |\angle CEA| = 180^\circ$, vrijedi jednačina

$$\gamma + \alpha + \frac{\alpha'}{2} + \gamma = 180^\circ$$

$$2\gamma + \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

2 BODA

$$2\gamma + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\gamma + \alpha = 180^\circ \longrightarrow \alpha = 180^\circ - 4\gamma$$

Trokut ADC je jednakokračan s osnovicom \overline{AD} pa vrijedi da je $|\angle BAC| = |\angle CDA| = \alpha$.

Budući da je $|\angle BCD| = \frac{\gamma'}{2}$ i $|\angle DAC| + |\angle ACD| + |\angle CDA| = 180^\circ$, vrijedi jednačba

$$\alpha + \gamma + \frac{\gamma'}{2} + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha + \gamma + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

$$2\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Dalje slijedi

$$4(180^\circ - 4\gamma) + \gamma = 180^\circ$$

$$720^\circ - 16\gamma + \gamma = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

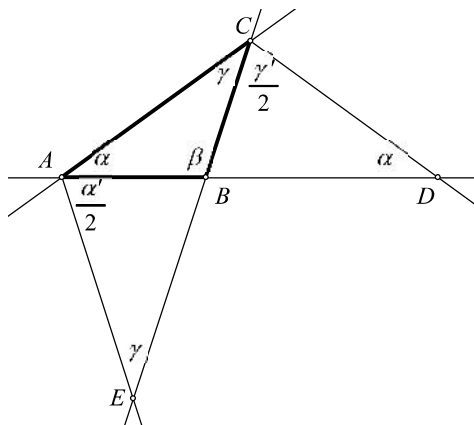
$$\gamma = 36^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 4 \cdot 36^\circ = 36^\circ, \beta = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ i $|\angle ACB| = \gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ' .

Tada je $\alpha' = \beta + \gamma$ i $\gamma' = \alpha + \beta$. 1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom \overline{CE} pa vrijedi da je $|\angle CEA| = |\angle ACB| = \gamma$. Za zbroj

veličina kutova u trokutu CAE vrijedi $\gamma + \gamma + \left(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 180^\circ$, odnosno $\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$.

2 BODA

Trokut ADC je jednakokrtačan s osnovicom \overline{AD} pa vrijedi da je $|\angle BAC| = |\angle CDA| = \alpha$. Za zbroj

veličina kutova u trokutu ADC vrijedi $\alpha + \alpha + \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 180^\circ$, odnosno $\frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 180^\circ$.

2 BODA

Zbrajanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{7}{2}\alpha + \beta + \frac{7}{2}\gamma = 360^\circ$, odakle, zbog činjenice da je

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, slijedi da je $\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$, odnosno da je $\alpha + \gamma = 72^\circ$.

1 BOD

Oduzimanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\gamma = 0$, odakle slijedi da je $\alpha - \gamma = 0$,

odnosno da je $\alpha = \gamma$.

1 BOD

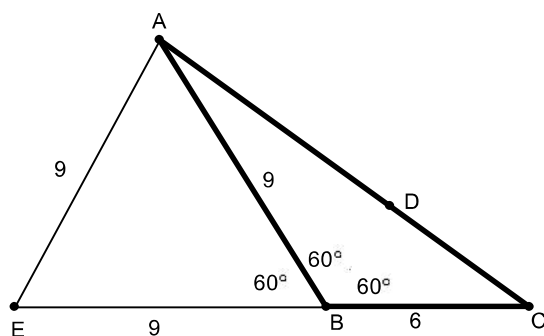
Iz $\alpha + \gamma = 72^\circ$ i $\alpha = \gamma$ zaključujemo da je $\alpha = \gamma = 36^\circ$, pa je $\beta = 108^\circ$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica \overline{BC} trokuta ABC preko točke B . Točkom A nacrtaj se pravac usporedan sa simetralom kuta $\angle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca BC označimo s E .

1 BOD

Trokut AEB je jednakostraničan s duljinama stranica od 9 dm jer je $|\angle EAB| = |\angle CBD| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim krakima) i $|\angle ABE| = 60^\circ$ ($\angle ABE$ i $\angle CBA$ su sukuti, $|\angle CBA| = 120^\circ$)

pa je i veličina trećeg kuta $|\angle BEA| = 60^\circ$.

3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu DBC prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\angle ACE$ zajednički kut oba trokuta, $|\angle BEA| = |\angle CBD| = 60^\circ$) te vrijedi:

2 BODA

$$|BC| : |EC| = |BD| : |EA|$$

$$6 : (6 + 9) = |BD| : 9$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

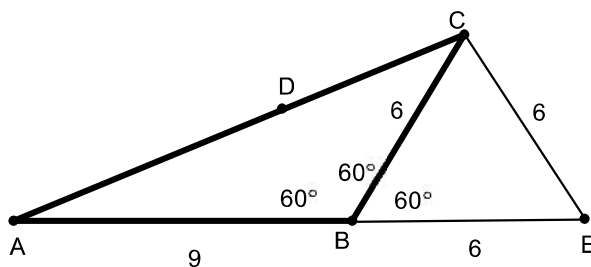
$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica \overline{AB} trokuta ABC preko točke B . Točkom C nacrtaj se pravac usporedan sa simetralom kuta $\angle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca AB označimo s E .

1 BOD

Trokut CBE je jednakostraničan s duljinama stranica od 6 dm jer je $|\angle DBA| = |\angle BCE| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim krakima) i $|\angle EBC| = 60^\circ$ ($\angle EBC$ i $\angle CBA$ su sukuti, $|\angle CBA| = 120^\circ$)

pa je i veličina trećeg kuta $|\angle CEB| = 60^\circ$.

3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu ABD prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\angle BAC$ zajednički kut oba trokuta, $|\angle DBA| = |\angle CEA| = 60^\circ$) te vrijedi:

2 BODA

$$|AB| : |AE| = |BD| : |EC|$$

$$9 : (6 + 9) = |BD| : 6$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA